ラプラス変換

2006/01/24 by 矢崎

目 次

1. ラプラス変換の基礎問題 2
2. 逆ラプラス変換の基礎問題 2
3. 導関数の変換（1 次導関数の利用） 2
4. 導関数の変換（2 次導関数の利用） 3
5. 微分方程式を解く 3
6. 変換の微分（ラプラス変換） 3
7. 変換の微分（逆ラプラス変換） 3
8. s 軸上の移動（ラプラス変換） 3
9. s 軸上の移動（逆ラプラス変換） 3
10. 積分の変換 4
11. 合成積の性質 4
12. 合成積（ラプラス変換） 4
13. 合成積（逆ラプラス変換） 4
14. 積分方程式 5
15. 積分微分方程式 5
16. 減衰振動 5
17. 強制振動 5
18. LCR 回路 6
19. LCR 回路の応答 6

解答例 **7**

注.

問題 (A): これだけは！（初級）
問題 (B): 脳みそに汗が；（中級）
問題 (C): むむ、御主只者でないの。（上級）

1.　ラプラス変換の基礎問題

問題 1. 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $at+b$　(2) at^2+bt+c　(3) e^{at+b}　(4) $\cos(\omega t+\theta)$

(5) $\sin(\omega t+\theta)$　(6) $\cos^2 t$　(7) $\sin^2 t$

(8) $f_1(t)=\begin{cases} a & (0\le t<b) \\ 0 & (b\le t)\end{cases}$　(9) $f_2(t)=\begin{cases} \dfrac{at}{b} & (0\le t<b) \\ 0 & (b\le t)\end{cases}$

(10) $f_3(t)=\begin{cases} a-\dfrac{at}{b} & (0\le t<b) \\ 0 & (b\le t)\end{cases}$　(11) $f_4(t)=\begin{cases} 0 & (0\le t<b) \\ a & (b\le t<c) \\ 0 & (c\le t)\end{cases}$

(12) (8) で $a=\dfrac{1}{h}$, $b=h$ とおくとどうなるか.

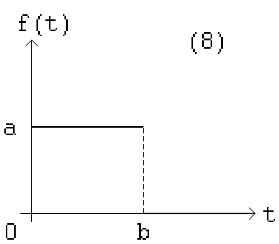
$(12)'$ (12) で $h\to 0$ とすると?

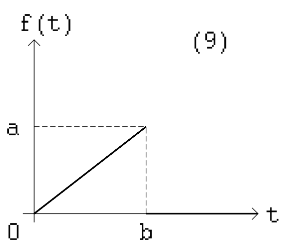
(13) (11) で $a=\dfrac{1}{2h}$, $b=d-h,\ c=d+h$ とおくとどうなるか.

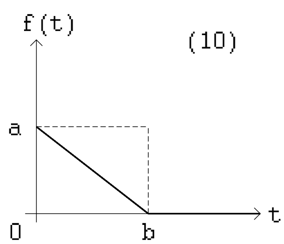
$(13)'$ (13) で $h\to 0$ とすると?

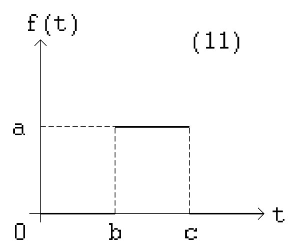
$(13)''$ (13)' で $d\to 0$ とすると?

(14) $f_5(t)=\begin{cases} 0 & (0\le t<b) \\ a & (b\le t)\end{cases}$









2.　逆ラプラス変換の基礎問題

問題 2. 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ。

(1) $\dfrac{b}{s+a}$　(2) $\dfrac{1}{s^2+a^2}$　(3) $\dfrac{s-b}{s^2-a^2}$　(4) $\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s^3}+\dfrac{d}{s^4}$

(5) $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$　(6) $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$　$(a\ne b)$　(7) $\dfrac{s-4}{s^2+2s+4}$

3.　導関数の変換（1 次導関数の利用）

問題 3. 導関数のラプラス変換を用いた変換：

$$\mathcal{L}[f(t)](s)=\frac{\mathcal{L}[f'(t)](s)+f(0)}{s}$$

用いて，次の関数のラプラス変換求めよ。

(1) $t+a$　(2) $(t+b)^2$　(3) $(t+c)^3$

4.　導関数の変換（2 次導関数の利用）

問題 4. 導関数のラプラス変換を用いた変換：

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[f'(t)](s) + f(0)}{s},$$

もしくは，2 次導関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0)$$

用いて，次の関数のラプラス変換求めよ。

(1) $\cos^2 t$　(2) $t\sin\omega t$　(3) $t\cos\omega t$　(4) $e^{at}\sin\omega t$　(5) $e^{at}\cos\omega t$　(6) te^{at}

5.　微分方程式を解く

問題 5. 次の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$

(2)　$y''(t) - (\alpha+\beta)y'(t) + \alpha\beta y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0 \quad (\alpha \neq \beta)$

(3)　$y''(t) - 2\alpha y'(t) + \alpha^2 y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$

(4)　$y''(t) - 2\alpha y'(t) + (\alpha^2+\beta^2)y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0 \quad (\beta > 0)$

(5)　$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = e^t, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

6.　変換の微分（ラプラス変換）

問題 6. 次の関数のラプラス変換を求めよ。

(1) $t\sin\omega t$　(2) $t\cos\omega t$　(3) t^n　(4) $t\cosh at$　(5) $t\sinh at$　(6) t^2e^t

7.　変換の微分（逆ラプラス変換）

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ としたとき、$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$ が変換の微分であるが、この逆を考えてみよう。すなわち、与えられた $F(s)$ の逆ラプラス変換を求めるのが困難なとき、その代わりに $-F'(s)$ の逆ラプラス変換を求めるのである。そうして $tf(t) = \mathcal{L}^{-1}[-F'(s)]$ より、$f(t)$ が求まる。

問題 7. (1)(2)(3) については問題 6.(1)(2) の結果を用い、(4)(5) については上の考察から、次の関数の逆ラプラス変換を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$　(2) $\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$　(3) $\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$　(4) $\log\left(1+\dfrac{\omega^2}{s^2}\right)$　(5) $\log\dfrac{s}{s-1}$

8.　s 軸上の移動（ラプラス変換）

問題 8. 次の関数のラプラス変換を求めよ。

(1) $t^m e^{at}$　(2) $e^{at}\sin\omega t$　(3) $e^{at}\cos\omega t$　(4) $te^{at}\sin\omega t$

9.　s 軸上の移動（逆ラプラス変換）

問題 9. 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ。

(1) $\dfrac{s+1}{(s+1)^2+2^2}$　(2) $\dfrac{2}{(s+1)^2+2^2}$　(3) $\dfrac{2s}{s^2+2s+5}$　(4) $\dfrac{s-4}{s^2+2s+4}$

10.　積分の変換

問題 10. 次の関数の逆ラプラス変換を (i) 積分の変換による方法, (ii) 部分分数展開を用いる方法の 2 通りによってそれぞれ求めよ。

$$(1)\ \frac{1}{s(s^2+\omega^2)} \qquad (2)\ \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$$

11.　合成積の性質

次の演算 $*$ を**合成積（接合積、畳み込み（積）、コンボリューション convolution** という：

$$f*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

便宜上、これをしばしば $f(t)*g(t)$ とも書くことにする。

問題 11. 次を示せ。

$$\begin{aligned}
&(1)\quad f*g(t)=g*f(t)\\
&(2)\quad f*(g+h)(t)=f*g(t)+f*h(t)\\
&(3)\quad (f*g)*h(t)=f*(g*h)(t)
\end{aligned}$$

12.　合成積（ラプラス変換）

問題 12. 合成積の変換を用いて、次のラプラス変換を求めよ。ただし、$U(s)=\mathcal{L}[u(t)](s)$ とおけ。

$$(1)\ \int_0^t (t-\tau)^n u(\tau)\,d\tau \qquad (2)\ \int_0^t \sin(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

$$(3)\ \int_0^t \cos(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \qquad (4)\ \int_0^t e^{t-\tau}u(\tau)\,d\tau$$

13.　合成積（逆ラプラス変換）

$H(s)=F(s)G(s)$, $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, $G(s)=\mathcal{L}[g(t)]$ としたとき、合成積の性質を用いて、

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]]=\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f*g(t)]]=f*g(t)$$

のようにして $H(s)$ の逆ラプラス変換を算出することができる。

問題 13. 合成積の変換を用いて，次の逆ラプラス変換を求めよ。

$$(1)\ \frac{1}{s^2(s-a)} \qquad (2)\ \frac{1}{(s-a)^2} \qquad (3)\ \frac{1}{s(s^2+\omega^2)} \qquad (4)\ \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$$

$$(5)\ \frac{1}{(s^2+\omega^2)^2} \qquad (6)\ \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} \qquad (7)\ \frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

14.　積分方程式

問題 14. 次の積分方程式をラプラス変換を用いて解け。（余力があれば、各方程式を微分し、微分方程式を解いて、答えを照らし合わす方法で検算せよ。）

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad y(t) = t + 1 + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau \\
&(2)\quad y(t) = 1 + 2\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)\,d\tau \\
&(3)\quad y(t) = 1 + t + \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\,d\tau \\
&(4)\quad y(t) = \sin 2t + \int_0^t \sin 2(t-\tau)y(\tau)\,d\tau \\
&(5)\quad y(t) = \sin t + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau
\end{aligned}
$$

15.　積分微分方程式

問題 15. 次の積分微分方程式をラプラス変換を用いて解け。（余力があれば、各方程式を微分し、微分方程式を解いて、答えを照らし合わす方法で検算せよ。）

$$(1)\ \ y'(t) = y(t) + 1 + \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 0.$$

$$(2)\ \ y''(t) = t + \int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

16.　減衰振動

問題 16. 運動方程式

$$Mu''(t) = -Ku(t) - \mu u'(t), \quad t > 0$$

を初期条件

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0$$

の下で解け。ただし，M, μ, K はどれも正の定数とする。

17.　強制振動

問題 17. 運動方程式

$$Mu''(t) = -Ku(t) - \mu u'(t) + K_0 \sin pt, \quad t > 0$$

を初期条件

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

の下で解け。ただし，M, K, K_0, μ, p はどれも正の定数とする。

18. LCR 回路

問題 18. LCR 回路の方程式

$$I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0, \quad t > 0$$

の解 $I(t)$ を初期条件

$$I(0) = I_0, \quad I'(0) = I_{00}$$

の下で求めよう。ただし，R, L はそれぞれ正の定数。

さて、$\gamma = \dfrac{R}{2L}$，$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ とおき、次のように場合分けして考えよ。

(1) $\omega_0 > \gamma$ のとき。($\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$，$J_0 = \dfrac{I_{00} + 2\gamma I_0}{\omega}$ とおいて整理せよ。)

(2) $\omega_0 < \gamma$ のとき。($\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$，$J_0 = \dfrac{I_{00} + 2\gamma I_0}{\omega}$ とおいて整理せよ。)

(3) $\omega_0 = \gamma$ のとき。($J_0 = I_{00} + \gamma I_0$ とおいて整理せよ。)

19. LCR 回路の応答

問題 19. LCR 回路に電圧 $E(t)$ を加えたときの回路方程式

$$I'(t) + \frac{R}{L}I(t) + \frac{1}{LC}\int_0^t I(\tau)\,d\tau = E(t), \quad t > 0$$

の解 $I(t)$ を初期条件

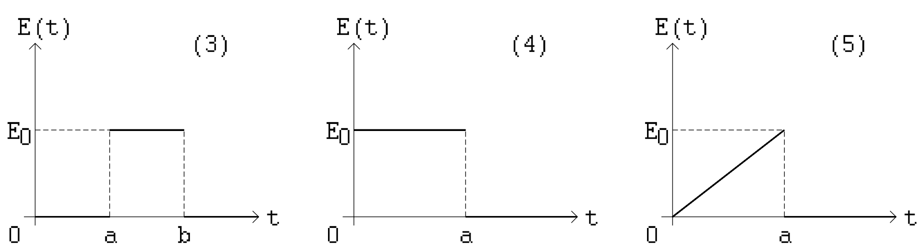
$$I(0) = I_0$$

の下で求めよう。ただし，R, L はそれぞれ正の定数。

さて，$\gamma = \dfrac{R}{2L}$，$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ とおき，次の各電圧 $E(t)$ について解け。ただし，E_0, p, a, b は正の定数とする。

(1) $E(t) = E_0$ (2) $E(t) = E_0 \sin pt$ (3) $E(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < a) \\ E_0 & (a \le t < b) \\ 0 & (b \le t) \end{cases}$

(4) $E(t) = \begin{cases} E_0 & (0 \le t < a) \\ 0 & (a \le t) \end{cases}$ (5) $E(t) = \begin{cases} \dfrac{E_0}{a}t & (0 \le t < a) \\ 0 & (a \le t) \end{cases}$



(6) $E(t) = \delta(t)$： 電源を入れてすぐ切る

(7) $E(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < a) \\ E_0 & (a \le t) \end{cases}$ ： 途中から電源を入れる

(8) $E(t) = \begin{cases} \dfrac{E_0}{a}t & (0 \le t < a) \\ E_0 & (a \le t) \end{cases}$ ： (5)(7) の組み合わせ

参考：
(3): 問題 1(11)
(4): 問題 1(8)
(5): 問題 1(9)
(6): 問題 1(12)'(13)"

解答例

解答 1. いろいろな関数のラプラス変換を求める基礎練習問題。ラプラス変換の線形性を用いよう。

(1) $\mathcal{L}[at+b] = a\mathcal{L}[t] + b\mathcal{L}[1] = \dfrac{a}{s^2} + \dfrac{b}{s}.$

(2) $\mathcal{L}[at^2+bt+c] = a\mathcal{L}[t^2] + b\mathcal{L}[t] + c\mathcal{L}[1] = \dfrac{2a}{s^3} + \dfrac{b}{s^2} + \dfrac{c}{s}.$

(3) $\mathcal{L}[e^{at+b}] = \mathcal{L}[e^b e^{at}] = e^b\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{e^b}{s-a}.$

(4) $\mathcal{L}[\cos(\omega t+\theta)] = \mathcal{L}[\cos\omega t\cos\theta - \sin\omega t\sin\theta] = \cos\theta\mathcal{L}[\cos\omega t] - \sin\theta\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}.$

(5) $\mathcal{L}[\sin(\omega t+\theta)] = \mathcal{L}[\sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta] = \cos\theta\mathcal{L}[\sin\omega t] + \sin\theta\mathcal{L}[\cos\omega t] = \dfrac{\omega\cos\theta + s\sin\theta}{s^2+\omega^2}.$

(6) $\mathcal{L}[\cos^2 t] = \mathcal{L}\left[\dfrac{\cos 2t+1}{2}\right] = \dfrac{1}{2}(\mathcal{L}[\cos 2t] + \mathcal{L}[1]) = \dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$

(7) $\mathcal{L}[\sin^2 t] = \mathcal{L}[1-\cos^2 t] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[\cos^2 t] = \dfrac{2}{s(s^2+4)}.$

(8) $\mathcal{L}[f_1(t)] = \displaystyle\int_0^b ae^{-st}\,dt = \dfrac{a(1-e^{-bs})}{s}.$

(9) $\mathcal{L}[f_2(t)] = \displaystyle\int_0^b \dfrac{a}{b}te^{-st}\,dt = \dfrac{a(1-(1+bs)e^{-bs})}{bs^2}.$

(10) (8) の $f_1(t)$, (9) の $f_2(t)$ を用いて、$f_3(t) = f_1(t) - f_2(t)$ より、

$$\mathcal{L}[f_3(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] - \mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{a(bs-1+e^{-bs})}{bs^2}.$$

(11) $\mathcal{L}[f_4(t)] = \displaystyle\int_b^c ae^{-st}\,dt = \dfrac{a(e^{-bs}-e^{-cs})}{s}.$

(12) $\dfrac{1-e^{-hs}}{hs}.$ (12)$'$ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{1-e^{-hs}}{hs} = 1.$

(13) $\dfrac{e^{-ds}}{2s}\dfrac{e^{hs}-e^{-hs}}{h}.$ (13)$'$ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{-ds}}{2s}\dfrac{e^{hs}-e^{-hs}}{h} = e^{-ds}.$ (13)$''$ $\displaystyle\lim_{d\to 0} e^{-ds} = 1.$

(14) $\mathcal{L}[f_5(t)] = \displaystyle\int_b^\infty ae^{-st}\,dt = \dfrac{ae^{-bs}}{s}.$

注 (4)(5). $\mathcal{L}[e^{i(\omega t+\theta)}] = e^{i\theta}\mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \dfrac{e^{i\theta}}{s-i\omega} = \dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)(s+i\omega)}{s^2+\omega^2}$ の実部と虚部を考えてもできますね.

注 (12)$'$(13)$''$. $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ を示したことになる.

注 (13)$'$. $\mathcal{L}[\delta(t-d)] = e^{-ds}\mathcal{L}[\delta(t)] = e^{-ds}$ を示したことになる.

解答 2. 逆ラプラス変換に慣れる練習問題。

(1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{b}{s+a}\right] = b\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-(-a)}\right] = be^{-at}.$

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+a^2}\right] = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s^2+a^2}\right] = \dfrac{1}{a}\sin at.$

(3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-b}{s^2-a^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-a^2}\right] - b\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-a^2}\right]$
$= \cosh at - \dfrac{b}{a}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s^2-a^2}\right] = \cosh at - \dfrac{b}{a}\sinh at.$

(4) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s^3}+\dfrac{d}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{b}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{c}{s^3}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{d}{s^4}\right]$
$= a\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] + b\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1!}{s^2}\right] + \dfrac{c}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2!}{s^3}\right] + \dfrac{d}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3!}{s^4}\right] = a + bt + \dfrac{c}{2}t^2 + \dfrac{d}{6}t^3.$

(5) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}\right] = 1-\cos t.$

(6) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}\right] = \dfrac{1}{a-b}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a} - \dfrac{1}{s-b}\right] = \dfrac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}).$

(7) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-4}{s^2+2s+4}\right] = \cdots$**注**$\cdots = e^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t - \dfrac{5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right).$

注 (5). 部分分数展開は A, B, C を定数として,

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

のようにする。通常，分母の次数より 1 つ小さい次数の分子を想定する。つまり，分母が 1 次 (今の場合 s) ならば分子は 0 次 (定数 A)，分母が 2 次 (今の場合 s^2+1) ならば分子は 1 次 ($Bs+C$) とおく。設定が終ったら，あとは等号が成立するように定数を定めるだけである。(6) も同じですね。

さて，話しついでにもう少し一般的な状況が見える例を考えてみよう。例えば $s^{-3}(s+1)^{-2}$ は，上の説明の通りに変形すれば,

$$\frac{1}{s^3(s+1)^2} = \frac{As^2+Bs+C}{s^3} + \frac{Ds+E}{(s+1)^2}$$

とするのだが，次のようにも整理できる。

$$\begin{aligned}\frac{As^2+Bs+C}{s^3} + \frac{Ds+E}{(s+1)^2} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D(s+1)+E-D}{(s+1)^2}\\ &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s+1}+\frac{E'}{(s+1)^2}.\end{aligned}$$

この方がすっきりしますね (ここで，$E' = E - D$ とおいた)。

注 (7). 分母の 2 次式は判別式が負なので，実数の範囲では因数分解できず，部分分数展開ができない。ところが，

$$\frac{s-4}{s^2+2s+4} = \frac{(s+1)-5}{(s+1)^2+3} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3} - \frac{5}{(s+1)^2+3} \qquad \cdots(\star)$$

と変形すれば，見通しが良くなりそうな気配がしてくる。つまり，

$$F(s) = \frac{s}{s^2+3} - \frac{5}{s^2+3}\left(= \frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2} - \frac{5}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right) \qquad \cdots(\diamond)$$

とおけば，上の $(\star)$ 式は $F(s+1)$ である。ここで，$F(s)$ の逆変換はわかるので，$F(s+1)$ も似たようなものではなかろうかと想像される。実際、そうであるのだが、詳しくは後で触れるとして (問題 9.(4) を見よ)，ここでは、複素数を使えばいままでの知識で解けることを見てみよう。分母 $s^2+2s+4=0$ の解を $\lambda_\pm = -1 \pm \sqrt{3}i$ とおくと，

$$\frac{s-4}{s^2+2s+4} = \frac{1}{s-\lambda_-} - \frac{5-\sqrt{3}i}{(s-\lambda_+)(s-\lambda_-)}$$

と変形できる。よって，前問 (6) の結果を使えば，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-4}{s^2+2s+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda_-}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5-\sqrt{3}i}{(s-\lambda_+)(s-\lambda_-)}\right] = e^{\lambda_- t} - \frac{5-\sqrt{3}i}{\lambda_+-\lambda_-}\left(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}\right)$$

となる。これを整理すると虚数部分が美しく消去され，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-4}{s^2+2s+4}\right] = e^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t - \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right)$$

を得る。$(\diamond)$ 式と比較して眺めると，さもありなんという感じですね。詳しくは「s 軸上の移動」(§8. と §9.) を見て下さい。

解答 3. (2) は (1) の，(3) は (2) の結果を使う。

(1) $\mathcal{L}[t+a] = \dfrac{\mathcal{L}[1]+a}{s} = \dfrac{a}{s} + \dfrac{1}{s^2}.$

(2) $\mathcal{L}[(t+b)^2] = \dfrac{\mathcal{L}[2(t+b)]+b^2}{s} = \dfrac{b^2}{s} + \dfrac{2}{s}\mathcal{L}[t+b] = \dfrac{b^2}{s} + \dfrac{2b}{s^2} + \dfrac{2}{s^3}.$

(3) $\mathcal{L}[(t+c)^3] = \dfrac{\mathcal{L}[3(t+c)^2]+c^3}{s} = \dfrac{c^3}{s} + \dfrac{3}{s}\mathcal{L}[(t+c)^2] = \dfrac{c^3}{s} + \dfrac{3c^2}{s^2} + \dfrac{6c}{s^3} + \dfrac{6}{s^4}.$

注. この問題の場合，それぞれ，

$\mathcal{L}[t+a] = \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[a]$
$\mathcal{L}[(t+b)^2] = \mathcal{L}[t^2] + \mathcal{L}[2bt] + \mathcal{L}[b^2]$
$\mathcal{L}[(t+c)^3] = \mathcal{L}[t^3] + \mathcal{L}[3ct^2] + \mathcal{L}[3c^2t] + \mathcal{L}[c^3]$

と展開したあと変換しても同じ手間ですね。

解答 4. いろいろな解き方が考えられるが，ここでは $\mathcal{L}[f'(t)]$ や $\mathcal{L}[f''(t)]$ を駆使して計算しよう。

(1) $\mathcal{L}[\cos^2 t] = \dfrac{\mathcal{L}[-2\cos t \sin t]+1}{s} = \dfrac{\mathcal{L}[-\sin 2t]+1}{s} = \dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$

(2) $\mathcal{L}[(t\sin\omega t)''] = s^2\mathcal{L}[t\sin\omega t] - s\cdot 0 - 0 = 2\omega\mathcal{L}[\cos\omega t] - \omega^2\mathcal{L}[t\sin\omega t]$ より、
$\mathcal{L}[t\sin\omega t] = \dfrac{2\omega}{s^2+\omega^2}\mathcal{L}[\cos\omega t] = \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$

(3) (2) より、$\mathcal{L}[(t\cos\omega t)'] = \mathcal{L}[\cos\omega t] - \omega\mathcal{L}[t\sin\omega t] = \dfrac{s(s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}$ なので、
$\mathcal{L}[t\cos\omega t] = \dfrac{\mathcal{L}[(t\cos\omega t)']+0}{s} = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$

(4) $F_4(s) = \mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]$, $F_5(s) = \mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]$ とおくと、
$\mathcal{L}[(e^{at}\sin\omega t)'] = aF_4(s) + \omega F_5(s) = sF_4(s) - 0.$ $\therefore (s-a)F_4 - \omega F_5 = 0.$

(5) (4) の F_4, F_5 を使うと、$\mathcal{L}[(e^{at}\cos\omega t)'] = aF_5(s) - \omega F_4(s) = sF_4(s) - 1.$
よって、$\omega F_4 + (s-a)F_5(s) = 1.$

(4)(5) F_4, F_5 は一緒に解くことができる：
$\begin{pmatrix} s-a & -\omega \\ \omega & s-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解いて、$\begin{pmatrix} F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(s-a)^2+\omega^2}\begin{pmatrix} \omega \\ s-a \end{pmatrix}.$

(6) $F_6(s) = \mathcal{L}[te^{at}]$ とおくと、$\mathcal{L}[(te^{at})'] = \mathcal{L}[e^{at} + ate^{at}] = \dfrac{1}{s-a} + aF_6(s).$
よって、$F_6(s) = \dfrac{\mathcal{L}[(te^{at})']+0}{s} = \dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1}{s-a} + aF_6(s)\right)$ を解いて、
$F_6(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}.$

注 (1). 以下のようにも解くことが出来る。

別解 1) $\mathcal{L}[\cos^2 t] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[\sin^2 t]$ と変形し，$\mathcal{L}[\sin^2 t]$ の結果（解答 1.(7)）を用いて解く。

別解 2) $\cos^2 t = (\cos 2t + 1)/2$ を用いる（解答 1.(6) 参照)。

注 (2)(3). 実は,

$$\mathcal{L}[t\sin\omega t] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin\omega t], \quad \mathcal{L}[t\cos\omega t] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos\omega t]$$

となっている。問題 6.(1)(2) 参照。

注 (4)(5). 以下の解き方の方が効率的かな。

別解 1) $\mathcal{L}[e^{at}e^{i\omega t}] = \mathcal{L}[e^{(a+i\omega)t}]$ の実部と虚部を考える。こちらの方が断然早い。

別解 2) 実は,

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t](s) = \mathcal{L}[\sin\omega t](s-a), \quad \mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t](s) = \mathcal{L}[\cos\omega t](s-a)$$

が成り立つ（問題 2.(7) と同類)。問題 8.(2)(3) 参照。

解答 5. 与えられた微分方程式の両辺をラプラス変換する。簡単のため, $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおく。

(1) $\mathcal{L}[y''(t)] + \omega^2\mathcal{L}[y(t)]$
$= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + \omega^2 Y(s) = (s^2+\omega^2)Y(s) - y_0 s - v_0 = 0.$
$\therefore Y(s) = \dfrac{y_0 s + v_0}{s^2+\omega^2} = y_0\dfrac{s}{s^2+\omega^2} + \dfrac{v_0}{\omega}\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}.$
$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y_0\cos\omega t + \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$

(2) $\mathcal{L}[y''(t)] - (\alpha+\beta)\mathcal{L}[y'(t)] + \alpha\beta\mathcal{L}[y(t)]$
$= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - (\alpha+\beta)sY(s) + (\alpha+\beta)y(0) + \alpha\beta Y(s)$
$= (s^2 - (\alpha+\beta)s + \alpha\beta)Y(s) - y_0 s - v_0 + (\alpha+\beta)y_0 = 0.$
$\therefore Y(s) = \dfrac{y_0 s + v_0 - (\alpha+\beta)y_0}{(s-\alpha)(s-\beta)} = \dfrac{c_1}{s-\alpha} + \dfrac{c_2}{s-\beta}.$
ここで、$c_1 = \dfrac{v_0 - \beta y_0}{\alpha-\beta}$, $c_2 = \dfrac{\alpha y_0 - v_0}{\alpha-\beta}.$
$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t}.$

(3) $\mathcal{L}[y''(t)] - 2\alpha\mathcal{L}[y'(t)] + \alpha^2\mathcal{L}[y(t)]$
$= (s^2 - 2\alpha s + \alpha^2)Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\alpha y(0)$
$= (s-\alpha)^2 Y(s) - sy_0 + 2\alpha y_0 - v_0 = 0.$
$\therefore Y(s) = \dfrac{y_0 s - 2\alpha y_0 + v_0}{(s-\alpha)^2} = \dfrac{c_1}{s-\alpha} + \dfrac{c_2}{(s-\alpha)^2}.$
ここで、$c_1 = y_0$, $c_2 = v_0 - \alpha y_0.$
$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = (c_1 + c_2 t)e^{\alpha t}.$

(4) $\mathcal{L}[y''(t)] - 2\alpha\mathcal{L}[y'(t)] + (\alpha^2+\beta^2)\mathcal{L}[y(t)]$
$= (s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2)Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\alpha y(0)$
$= ((s-\alpha)^2 + \beta^2)Y(s) - sy_0 + 2\alpha y_0 - v_0 = 0.$
$\therefore Y(s) = \dfrac{y_0 s - 2\alpha y_0 + v_0}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \dfrac{c_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \dfrac{c_2\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.$
ここで、$c_1 = y_0$, $c_2 = \dfrac{v_0 - \alpha y_0}{\beta}.$
$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t).$

(5) $\mathcal{L}[y'''(t)] - 3\mathcal{L}[y''(t)] + 3\mathcal{L}[y'(t)] - \mathcal{L}[y(t)]$
$= (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + 3(sy(0) + y'(0)) - 3y(0)$
$= (s-1)^3 Y(s) = \mathcal{L}[e^t] = \dfrac{1}{s-1}.$
$\therefore Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^4} = \dfrac{1}{3!}\dfrac{3!}{(s-1)^4}.$
$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \dfrac{1}{6}e^t t^3.$

注 (3). 問題 4.(6) の結果を使いました。

注 (4). 解答 2.(7) の解説と問題 9. を参照。

注 (5). 最後の逆変換のところは問題として少し勇み足でした。問題 8.(1) をみて下さい。スッキリします。

注. 例えば、微分方程式

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \qquad \cdots\cdots (*)$$

に対するラプラス変換は, $\dfrac{d^m}{dt^m}$ を s^m に機械的に置き換えて，それを $Y(s)$ でまとめ,

$$(s^2 + as + b)Y(s) + (\text{初期データ}) = \mathcal{L}[f(t)](s) \qquad \cdots\cdots (**)$$

という構造をなしている。

注 (演算子法との比較). 演算子法で $(*)$ を解く場合は，通常，次の 3 段階の手順を踏む。

（第 1 段）微分演算子を $D = \dfrac{d}{dt}$ とおいて，斉次方程式

$$(D^2 + aD + b)y(t) = 0$$

の一般解 $y_0(t)$ を求める。

（第 2 段）何らかの方法で $(*)$ の特殊解 $y_*(t)$ を求める。

（第 3 段）これより $(*)$ の一般解は $y_0(t) + y_*(t)$ であるから，あとは初期データを満たす様に $y_0(t) + y_*(t)$ の係数を決定する。

解答 6. 変換の微分を用いる練習問題。

(1) $\mathcal{L}[t\sin\omega t] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin\omega t] = -\dfrac{d}{ds}\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} = \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$

(2) $\mathcal{L}[t\cos\omega t] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos\omega t] = -\dfrac{d}{ds}\dfrac{s}{s^2+\omega^2} = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$

(3) $\mathcal{L}[t^n] = \left(-\dfrac{d}{ds}\right)^n \mathcal{L}[1] = (-1)^n \left(\dfrac{d}{ds}\right)^n \dfrac{1}{s} = (-1)^n\,(-1)^n\,\dfrac{n!}{s^{n+1}} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}.$

(4) $\mathcal{L}[t\cosh at] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\cosh at] = -\dfrac{d}{ds}\dfrac{s}{s^2-a^2} = \dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}.$

(5) $\mathcal{L}[t\sinh at] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\sinh at] = -\dfrac{d}{ds}\dfrac{a}{s^2-a^2} = \dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}.$

(6) $\mathcal{L}[t^2e^t] = \left(-\dfrac{d}{ds}\right)^2 \mathcal{L}[e^t] = \left(\dfrac{d}{ds}\right)^2 \dfrac{1}{s-1} = \dfrac{2}{(s-1)^3}.$

注 (1)(2). 解答 4.(2)(3) と比較せよ。

注 (6). 後述の問題 8.(1) を参照してほしい。

解答 7. (1) は式変形と問題 6.(2) の、(2) は問題 6.(1) の、(3) は (1) と問題 6.(2) の結果をそれぞれ用いて計算する。(4)(5) は、$-\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[tf(t)]$, すなわち、

$$f(t) = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]\right]$$

を用いる。

(1) $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2} = \dfrac{s^2+\omega^2-(s^2-\omega^2)}{2\omega^2(s^2+\omega^2)^2} = \dfrac{1}{2\omega^2}\left(\dfrac{1}{s^2+\omega^2} - \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right)$
と式変形して，問題 6.(2) の結果を用いて、以下のように算出する。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]\right)$$
$$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega} - t\cos\omega t\right) = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t).$$

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \dfrac{1}{2\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \dfrac{t}{2\omega}\sin\omega t.$

(3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] + \omega^2\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]$

$$= t\cos\omega t + \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t) = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t).$$

(4) $-\dfrac{d}{ds}\log\left(1+\dfrac{\omega^2}{s^2}\right) = \dfrac{2}{s} - \dfrac{2s}{s^2+\omega^2}$ より、
$\mathcal{L}^{-1}\left[\log\left(1+\dfrac{\omega^2}{s^2}\right)\right] = \dfrac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s} - \dfrac{2s}{s^2+\omega^2}\right] = \dfrac{2}{t}(1-\cos\omega t).$

(5) $-\dfrac{d}{ds}\log\dfrac{s}{s-1} = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s}$ より、
$\mathcal{L}^{-1}\left[\log\dfrac{s}{s-1}\right] = \dfrac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s}\right] = \dfrac{1}{t}(e^t-1).$

解答 8. s 軸上の移動の技法をたっぷりと用いる。

(1) $\mathcal{L}[t^m e^{at}](s) = \mathcal{L}[t^m](s-a) = \dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}}.$

(2) $\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t](s) = \mathcal{L}[\sin\omega t](s-a) = \dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.$

(3) $\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t](s) = \mathcal{L}[\cos\omega t](s-a) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}.$

(4) $\mathcal{L}[te^{at}\sin\omega t](s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t](s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin\omega t](s-a)$

$$= -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} = \frac{2\omega(s-a)}{((s-a)^2+\omega^2)^2}.$$

注 (1). 問題 4.(6)、解答 5.(5)、問題 6.(6) を再確認して下さい。

注 (4). 問題 6.(1) の結果を使えば

$$\mathcal{L}[te^{at}\sin\omega t](s) = \mathcal{L}[t\sin\omega t](s-a) = \frac{2\omega(s-a)}{((s-a)^2+\omega^2)^2}.$$

解答 9. s 軸上の移動の技法を鑑み考察する。

(1) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+2^2}$ とおくと，与式は $F(s+1)$.
$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos 2t$ より、$\mathcal{L}^{-1}[F(s+1)] = e^{-t}\cos 2t.$

(2) $F(s) = \dfrac{2}{s^2+2^2}$ とおくと，与式は $F(s+1)$.
$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sin 2t$ より、$\mathcal{L}^{-1}[F(s+1)] = e^{-t}\sin 2t.$

(3) $\dfrac{2s}{s^2+2s+5} = \dfrac{2(s+1)-2}{(s+1)^2+2^2}$ と式変形する。
$F(s) = \dfrac{2s}{s^2+2^2} - \dfrac{2}{s^2+2^2}$ とおくと，与式は $F(s+1)$.
$\therefore \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\cos 2t - \sin 2t$ より、$\mathcal{L}^{-1}[F(s+1)] = e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t)$.

(4) $\dfrac{s-4}{s^2+2s+4} = \dfrac{(s+1)-5}{(s+1)^2+3}$ と式変形する。
$F(s) = \dfrac{s}{s^2+3} - \dfrac{5}{s^2+3}$ とおくと，与式は $F(s+1)$.
$\therefore \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos\sqrt{3}t - \dfrac{5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$ より、$\mathcal{L}^{-1}[F(s+1)] = e^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t - \dfrac{5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right)$.

注 (4). 問題 2.(7) がすっきりと解けましたね。

解答 10. (i) と (ii) のどちらが簡単かは問題による。

(1) (i) $\dfrac{1}{\omega}\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{1}{s^2+\omega^2}$ より、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}[\sin\omega t]\right] = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\, d\tau = -\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega t - 1).$$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \dfrac{1}{\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$.

(2) (i) (1) より、

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)\right] = \frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$$

なので、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos\omega\tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega^2}(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t) = \frac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin\omega t).$$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right] = \dfrac{1}{\omega^2}(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t) = \dfrac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)$.

注 (2)(ii). 部分分数展開は以下のように行なっている。

$$\frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+\omega^2}.$$

(ii) の方が (i) より一見楽に見えるが，部分分数展開という（見えない）手間はかかっている。

解答 11. 合成積の定義通りに左辺から右辺を導出すれば良い。

(1) $$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$
$$\overset{(\star)}{=} \int_t^0 f(r)g(t-r)\,(-dr)$$
$$= \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = (g*f)(t).$$

$(\star)$：$r = t-\tau$ $(dr = -d\tau)$ と変数変換

(2) $$(f*(g+h))(t) = \int_0^t f(t-\tau)(g(\tau)+h(\tau))\,d\tau$$
$$= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = (f*g)(t)+(f*h)(t).$$

(3) $$((f*g)*h)(t) = \int_0^t (f*g)(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$
$$= \int_0^t \int_0^{t-\tau} f(t-\tau-r)g(r)\,dr\,h(\tau)\,d\tau \qquad \cdots\cdots\text{(i)}$$

一方，$(f*(g*h))(t) = \int_0^t f(t-\tau)(g*h)(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\int_0^\tau g(\tau-r)h(r)\,dr\,d\tau$
$$= \int_0^t \int_0^\tau f(t-\tau)g(\tau-r)h(r)\,dr\,d\tau \qquad \cdots\cdots\text{(ii)}$$

である。以下，式 (i) を変形して式 (ii) を導くことを考える。

$$\text{(i)} = \int_0^t \left\{ \int_0^{t-\tau} f(t-\tau-r)g(r)\,dr \right\} h(\tau)\,d\tau$$
$$\overset{(\bullet)}{=} \int_0^t \int_\tau^t f(t-\rho)g(\rho-\tau)\,d\rho\,h(\tau)\,d\tau$$
$$= \int_0^t \int_\tau^t f(t-\rho)g(\rho-\tau)h(\tau)\,d\rho\,d\tau$$
$$\overset{(\diamond)}{=} \int_0^t \int_0^\rho f(t-\rho)g(\rho-\tau)h(\tau)\,d\tau\,d\rho$$
$$\overset{(*)}{=} \int_0^t \int_0^{\tau'} f(t-\tau')g(\tau'-r')h(r')\,dr'\,d\tau'$$
$$\overset{(\triangleright)}{=} \text{(ii)}$$

$(\bullet)$：$\rho = \tau + r$ $(d\rho = dr)$ と変数変換

$(\diamond)$：ρ の積分と τ の積分の順序交換（ここがミソ！）

$(*)$：$\tau = r', \rho = \tau'$ と変数変換

$(\triangleright)$：$r' = r, \tau' = \tau$ と変数変換

注. $(*)$ $(\triangleright)$ と 2 段階踏んだのはウッカリを避けるため。混乱しない人は $(*)$ の変換で $\tau = r, \rho = \tau$ として良い。

注. (1) を交換法則，(2) を分配法則，(3) を結合法則とよぶ。これらの法則に加え，

$$(f*0)(t) = (0*f)(t) = 0$$

も成り立つので，合成積は積と銘打つだけあり，数の乗法，いわゆる積と類似の性質をもっていることがわかる。しかし残念? ながら一般に

$$(1 * g)(t) = (g * 1)(t) \neq g(t), \quad (f * f)(t) \not\geq 0 \qquad \cdots\cdots (\circ)$$

であり，完全に乗法と同じ性質を有しているわけではない。

問. 式 $(\circ)$ を満たすような関数 $g(t)$ や $f(t)$ の例をあげよ。

解. 例えば、$g(t) = t,\ f(t) = \cos t$ とすると、

$$(1 * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot (t - \tau)\, d\tau = \frac{t^2}{2} \neq g(t).$$

また、

$$(f * f)(t) = \int_0^t \cos\tau \cos(t - \tau)\, d\tau = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$$

であるから、例えば、$t = \pi$ のとき $(f * f)(t) < 0$.

解答 12. 合成積の変換を用いる。

(1) $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^n u(\tau)\, d\tau = t^n * u(t)$ より、

$$\mathcal{L}[t^n * u(t)] = \mathcal{L}[t^n]\mathcal{L}[u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}U(s).$$

(2) $\displaystyle\int_0^t \sin(t-\tau) u(\tau)\, d\tau = \sin t * u(t)$ より、

$$\mathcal{L}[\sin t * u(t)] = \mathcal{L}[\sin t]\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s^2+1}U(s).$$

(3) $\displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau) u(\tau)\, d\tau = \cos t * u(t)$ より、

$$\mathcal{L}[\cos t * u(t)] = \mathcal{L}[\cos t]\mathcal{L}[u(t)] = \frac{s}{s^2+1}U(s).$$

(4) $\displaystyle\int_0^t e^{t-\tau} u(\tau)\, d\tau = e^t * u(t)$ より、

$$\mathcal{L}[e^t * u(t)] = \mathcal{L}[e^t]\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s-1}U(s).$$

解答 13. 小解説の通りに計算する。

(1) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-a)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-a}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[t\right]\mathcal{L}\left[e^{at}\right]\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[t * e^{at}\right]\right]$$

$$= \int_0^t (t-\tau)e^{a\tau}\, d\tau = \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1).$$

(2) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\cdot\frac{1}{s-a}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[e^{at}\right]\mathcal{L}\left[e^{at}\right]\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[e^{at} * e^{at}\right]\right]$$

$$= \int_0^t e^{a(t-\tau)}e^{a\tau}\, d\tau = te^{at}.$$

注. 問題 4.(6), 解答 5.(3) と比較せよ。

(3) 問題 10.(1) と同じ問題である。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\,[1]\,\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[1*\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\right] = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

(4) 問題 10.(2) と同じ問題である。前問 (3) の結果を用いる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\,[1]\,\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}\right]\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[1*\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}\right]\right] = \frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos\omega\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t).$$

(5) 問題 7.(1) と同じ問題である。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}*\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\right] = \frac{1}{\omega^2}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\sin\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t).$$

注. 積分するとき、加法定理 $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))$ を用いた。

(6) 問題 7.(2) と同じ問題である。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\mathcal{L}\,[\cos\omega t]\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}*\cos\omega t\right]\right] = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\cos\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{2\omega}t\sin\omega t.$$

注. 積分するとき、加法定理 $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$ を用いた。

(7) 問題 7.(3) と同じ問題である。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right]\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right]\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\cos\omega t * \cos\omega t\right]\right] = \frac{1}{\omega}\int_0^t \cos\omega(t-\tau)\cos\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{2\omega}(\omega t\cos\omega t + \sin\omega t).$$

注. 積分するとき、加法定理 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ を用いた。

解答 14. $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおく。各積分方程式の両辺をラプラス変換し、$Y(s)$ について整理し、$Y(s)$ を逆ラプラス変換して解 $y(t)$ を求める。

(1) $Y(s) = \mathcal{L}[t+1] + \mathcal{L}[\sin t * y(t)] = \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[\sin t]Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}Y(s)$ より、
$Y(s) = \frac{(s+1)(s^2+1)}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2!}\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{3!}\frac{3!}{s^4}.$
よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}.$

(2) $Y(s) = \mathcal{L}[1] + 2\mathcal{L}[\cos t * y(t)] = \mathcal{L}[1] + 2\mathcal{L}[\cos t]Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2s}{s^2+1}Y(s)$ より、
$Y(s) = \frac{s^2+1}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s} + \frac{2}{(s-1)^2} \qquad \cdots\cdots(\star)$
よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 + 2te^t.$

注. $(\star)$ の第 2 項の逆変換には、問題 4.(6) の結果を使った。もちろん、部分分数展開してもよい。

(3) $Y(s) = \mathcal{L}[1+t] + 2\mathcal{L}[e^t * y(t)] = \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[e^t]Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}Y(s)$ より、
$Y(s) = \frac{s^2-1}{s^2(s-2)} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2(s-2)} \qquad \cdots\cdots(\spadesuit)$
よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{2t} - \frac{1}{4}(e^{2t} - 2t - 1) = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}e^{2t}.$

注. $(\spadesuit)$ の第 2 項の逆変換には、問題 13.(1) の結果を使った。もちろん、部分分数展開してもよい。

(4) $Y(s) = \mathcal{L}[\sin 2t] + \mathcal{L}[\sin 2t * y(t)] = \mathcal{L}[\sin 2t] + \mathcal{L}[\sin 2t]Y(s)$ より、
$Y(s) = \frac{\mathcal{L}[\sin 2t]}{1-\mathcal{L}[\sin 2t]} = \frac{2}{s^2+2} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}^2}$. よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t.$

(5) $Y(s) = \mathcal{L}[\sin t] + \mathcal{L}[\sin t * y(t)] = \mathcal{L}[\sin t] + \mathcal{L}[\sin t]Y(s)$ より、$Y(s) = \frac{\mathcal{L}[\sin t]}{1-\mathcal{L}[\sin t]} = \frac{1}{s^2}.$
よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = t.$

注. 微分して解くこともできる。例えば (1) の場合は、以下のように解ける。

$$y(t) = t+1+\sin t \int_0^t \cos\tau\, y(\tau)\, d\tau - \cos t \int_0^t \sin\tau\, y(\tau)\, d\tau \qquad \cdots\cdots (\spadesuit_0)$$

と変形し、両辺を微分すると、

$$y'(t) = 1+\cos t \int_0^t \cos\tau\, y(\tau)\, d\tau + \sin t \cos t\, y(t) + \sin t \int_0^t \sin\tau\, y(\tau)\, d\tau - \cos t \sin t\, y(t) \qquad \cdots\cdots (\spadesuit_1)$$

$$\therefore\ y''(t) = -\sin t \int_0^t \cos\tau\, y(\tau)\, d\tau + \cos^2 t\, y(t) + \cos t \int_0^t \sin\tau\, y(\tau)\, d\tau + \sin^2 t\, y(t)$$

$$= t+1-y(t)+y(t) = t+1.$$

ここで、$(\spadesuit_0)$ を用いた。よって、$y'(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + C_1$. $\therefore\ y(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2$.

$(\spadesuit_0)$ より $y(0) = 1$, $(\spadesuit_1)$ より $y'(0) = 1$ なので、$C_1 = C_2 = 1$. $\therefore$ $y(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$.

解答 15. $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおき、問題 14. と同じ方法で解く。

(1) $sY(s) - y(0) = \mathcal{L}[y(t)] + \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[e^t * y(t)] = Y(s) + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}Y(s)$ と $y(0) = 0$ より、

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2(s-2)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2(s-2)} \qquad \cdots\cdots (\heartsuit)$$

よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = t + \frac{1}{4}(e^{2t} - 2t - 1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t}$.

注. $(\heartsuit)$ の第 2 項の逆変換には、問題 13.(1) の結果を使った。もちろん、部分分数展開してもよい。

(2) $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[t * y(t)] = \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[t]Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}Y(s)$ と初期条件より、

$Y(s) = \frac{1}{s^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2+1}\right)$. よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2}(\sinh t - \sin t)$.

解答 16. $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$, $k = \frac{\mu}{2M}$ とおくと、

$$u''(t) + 2ku'(t) + \omega^2 u(t) = 0.$$

両辺をラプラス変換し、$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ とおくと、

$$s^2U(s) - su_0 - v_0 + 2k(sU(s) - u_0) + \omega^2 U(s) = (s^2 + 2ks + \omega^2)U(s) - su_0 - v_0 - 2ku_0 = 0.$$

$$\therefore\ U(s) = \frac{su_0 + v_0 + 2ku_0}{s^2 + 2ks + \omega^2} \qquad \cdots\cdots (\heartsuit).$$

よって 分母 $= 0$ の根は、$-k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$ であるので、以下の 3 つの場合に分けられる。

場合 1($k > \omega$)**.** 異なる 2 実根を $\alpha = -(k - \sqrt{k^2-\omega^2}) > \beta = -(k + \sqrt{k^2-\omega^2})$ とすれば、問題 5.(2) に相当するので、解は $u(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t}$. ここで、

$$c_1 = \frac{v_0 + (k+\sqrt{k^2-\omega^2})u_0}{2\sqrt{k^2-\omega^2}}, \quad c_2 = -\frac{v_0 + (k-\sqrt{k^2-\omega^2})u_0}{2\sqrt{k^2-\omega^2}}.$$

よって、$\beta < \alpha < 0$ であるので、摩擦が大きい場合（$\mu^2 > 4KM \;\Leftrightarrow\; k > \omega$)、物体は振動することなく、指数的につりあいの位置（$u = 0$）に近付く。これを**超過減衰**と呼ぶ。

場合 2($k = \omega$)**.** 重根を $\alpha = -k$ とすれば、問題 5.(3) に相当するので、解は $u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\alpha t}$. ここで、

$$c_1 = u_0, \quad c_2 = v_0 + ku_0.$$

よって、$\alpha < 0$ であるので、摩擦係数 μ の 2 乗がバネ定数 K と比例している場合（$\mu^2 = 4KM \;\Leftrightarrow\; k = \omega$）も、物体は振動することなく、指数的につりあいの位置（$u = 0$）に近付く。また、$c_1 c_2 < 0$ のときのみ、運動の途中で高々1 回つりあいの位置を横切る。これを**臨界減衰**と呼ぶ。

場合 3($k < \omega$)**.** 共役複素根を $\alpha \pm i\beta$ ($\alpha = -k, \beta = \sqrt{\omega^2 - k^2}$) とすれば、問題 5.(4) に相当するので、解は $u(t) = (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)e^{\alpha t}$. ここで、

$$c_1 = u_0, \quad c_2 = \frac{v_0 + ku_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}.$$

よって、$\alpha < 0$ であるので、摩擦が小さい場合（$\mu^2 < 4KM \;\Leftrightarrow\; k < \omega$)、物体は振動しつづけるが、振幅は指数的に小さくなり、最終的にはつりあいの位置（$u = 0$）に近付いていく。これを**過少減衰**（**減衰振動**）と呼ぶ。摩擦を小さくしていった場合、すなわち $\mu \to 0$ のとき、$k \to 0$ であるから、$\alpha \to 0,\ \beta \to \omega$ で、物体の運動は単振動（調和振動）の運動（解：$c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$）に近付いていく。