令和4年度入学試験問題

数　学

（前期日程）

	学部等	ページ	解答用紙枚数
1	工学部 【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B】	1～6	5
2	医学部 【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B】	7～12	5
3	教育学部（小主免理系・中主免理系） 【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B】 または 【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B】	13～19	4
4	教育学部（小主免理系・中主免理系を除く） 農学部 【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B】	20～23	3

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 上記の1から4のうち，志願したものを選び解答すること。1から4のそれぞれの初めのページに注意事項が記載されているので，試験開始後，よく読んで解答を始めること。
3. すべての解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入すること。受験番号が正しく記入されていない場合は，採点されないことがある。
4. 指定されたもの以外を解答しても，また解答用紙の指定された解答欄以外の場所に解答しても採点の対象とはされないので，十分注意すること。
5. 試験中に問題冊子および解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁および汚損等がある場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

工　学　部

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

注　意　事　項

1. 問題は，1，2，3，4 および5の5問ある。これら5問をすべて解答すること。
2. 解答は問題ごとに指定された解答用紙の解答欄に記入すること。解答欄が不足する場合は，「裏面に続く」と書き，裏面の枠内を使用すること。

1 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) 関数 $f(x) = x(\log x)^2$ の導関数は，$f'(x) = \left(\boxed{\text{あ}}\right)\log x$ である。

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{x^3 \cos^2 x}$ である。

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{(x-1)(x-2)}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{う}} + C$ である。ただし，C は積分定数とする。

(4) 関数 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{え}} + C$ である。ただし，C は積分定数とする。

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$ の値は，$\boxed{\text{お}}$ である。

2　関数 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ および座標平面上の原点Oを通る曲線 $C: y=f(x)$ について，次の各問に答えよ。

(1)　次の空欄を適切な数または数式で埋めよ。

・$f(x)$ の導関数は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{2\sqrt{3-x}}$ である。

・$f(x)$ の第2次導関数は，$f''(x)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{4(3-x)\sqrt{3-x}}$ である。

・Oにおける C の接線を ℓ とし，ℓ の方程式を $y=kx$ （k は定数）とすると，k の値は $\boxed{\text{う}}$ である。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to3-0} f'(x)$ は，次のいずれかである。

$\displaystyle\lim_{x\to3-0} f'(x)$ は有限な値である

$\displaystyle\lim_{x\to3-0} f'(x)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to3-0} f'(x)=-\infty$

この3通りのいずれであるかを答えよ。ただし，有限な値であるときは，その値も求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，曲線 C の概形をかけ。

(4)　曲線 C と直線 ℓ および直線 $x=3$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

3 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC と点 P が

$$3\overrightarrow{OP} + 8\overrightarrow{AP} + 7\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

を満たしているとする。直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$，$\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ として，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ のそれぞれを，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\triangle$ABQ の面積を求めよ。

(3) $\triangle$ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ と平面 ABC が垂直であることを示せ。

(4) 四面体 PABQ の体積を求めよ。

4 次の文章中の空欄を適当な数で埋めよ。

A，B，Cという3つの袋がある。どの袋の中にも赤玉2個と白玉1個が入っている。この状態から始めて，3つの袋の間で次のような3回の玉の移動を考える。

1回目は，Aから玉を1個取り出し，Bへ入れる。1回目の玉の移動が終わったときのBの中の赤玉の個数を N_1 とする。

続けて，2回目は，Bから玉を1個取り出し，Cへ入れる。2回目の玉の移動が終わったときのCの中の赤玉の個数を N_2 とする。

続けて，3回目は，Cから玉を1個取り出し，Aへ入れる。3回目の玉の移動が終わったときのAの中の赤玉の個数を N_3 とする。

ただし，袋Aから玉が取り出されるとき，どの玉も同じ確率で取り出されるものとする。袋B，Cから玉が取り出されるときも同様とする。

$N_1 = 2$ となる確率は $\boxed{\text{あ}}$ であり，$N_1 = 3$ となる確率は $\boxed{\text{い}}$ である。

「1回目に赤玉が移動して2回目に白玉が移動する」確率は $\boxed{\text{う}}$ である。一方，「1回目に白玉が移動して2回目に白玉が移動する」確率は $\boxed{\text{え}}$ である。よって，$N_2 = 2$ となる確率は $\boxed{\text{お}}$ である。

1回目の移動が終わったときの，Aの中の赤玉の個数に注意すると，$N_3 = 1$ となる確率は $\boxed{\text{か}}$ であり，$N_3 = 3$ となる確率は $\boxed{\text{き}}$ である。また，$N_3 = 2$ となる確率は $\boxed{\text{く}}$ である。

5 座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と点 $\mathrm{A}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ がある。A を通る傾き t の直線と C との 2 つの交点を $\mathrm{Q}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}_2(x_2, y_2)$ とする。ただし, $x_1 < x_2$ とする。また, C の Q_1 における接線を ℓ_1, Q_2 における接線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 は交わり, その交点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とする。このとき, 次の各問に答えよ。

(1) $x_2 - x_1$ と $y_2 - y_1$ を, それぞれ t を用いて表せ。

(2) $X = -2t$ であることを示せ。

(3) t がすべての実数値をとって変化するとき, 点 P の軌跡を求めよ。

医　学　部

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

注　意　事　項

1. 問題は，1，2，3，4 および5の5問ある。これら5問をすべて解答すること。
2. 解答は問題ごとに指定された解答用紙の解答欄に記入すること。解答欄が不足する場合は，「裏面に続く」と書き，裏面の枠内を使用すること。

1 xを実数とするとき，次の不等式を満たすxの値の範囲を求めよ。

$$8^x + 8^{-x} - (4^x + 4^{-x}) - 11 \geqq 0$$

2 1辺の長さが1の正四面体OABCと点Pが

$$3\overrightarrow{OP}+8\overrightarrow{AP}+7\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$

を満たしているとする。直線OPと平面ABCの交点をQとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$として，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$のそれぞれを，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) △ABQの面積を求めよ。

(3) △ABCの重心をGとするとき，$\overrightarrow{OG}$と平面ABCが垂直であることを示せ。

(4) 四面体PABQの体積を求めよ。

3 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，$a_1=\frac{1}{2}$，$b_1=2$，および

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=2a_n+1 \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

で定める。このとき，次の各問に答えよ。

(1) a_2，b_2，a_3，b_3 を求めよ。

(2) 次の式を満たす定数 p，q，r の組を2組求めよ。

$$a_{n+1}+pb_{n+1}+q=r(a_n+pb_n+q) \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

(3) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，それぞれの第 n 項 a_n，b_n を求めよ。

(4) 2つの数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を，$c_1=\sqrt{2}$，$d_1=4$，および

$$\begin{cases} c_{n+1}=c_nd_n \\ d_{n+1}=2c_n^2 \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

で定める。$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ の第 n 項 c_n，d_n について，$c_n^2d_n$ を求めよ。

4 微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ が，$g(0)=1$，および

$$f(x)=g(x)+3\int_0^x e^{t-x}f(t)\,dt$$

を満たしているとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　$f'(x)=2f(x)+h(x)$ を満たす関数 $h(x)$ を，$g(x)$ と $g'(x)$ を用いて表せ。

(2)　$e^{-2x}f(x)$ の導関数を，$g(x)$，$g'(x)$ および e^{-2x} を用いて表せ。

(3)　$e^{-2x}f(x)$ が定数関数のとき，$e^{x}g(x)$ も定数関数であることを示せ。また，このときの $g(x)$ および $f(x)$ を求めよ。

(4)　$g(x)=x^2+1$ のとき，$f(x)$ を求めよ。

5　袋の中に，1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれた 10 枚の札が入っている。これをはじめの状態とする。袋から無作為に 1 枚の札を取り出し，取り出した札は袋の中に戻さないという操作を，はじめの状態から続けて n 回行う。n 回のうち，k 回目 $(k=1,2,\cdots,n)$ の操作で取り出された札に書かれた数を X_k とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　$n=6$ のとき，X_1，X_2，$\cdots$，X_6 の組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_6)$ で，$X_1=1$，$X_2=2$，かつ次の (＊) を満たす例を 1 つ挙げよ。

(＊) すべての i，j $(i \neq j)$ に対して $X_i + X_j \neq 10$

(2)　$n=7$ のとき，次の (＊＊) が必ず成り立つことを示せ。

(＊＊) $X_i + X_j = 10$ を満たす i，j $(i \neq j)$ が存在する

(3)　$n=3$ のとき，3 回目の操作ではじめて(2)の (＊＊) が成り立つ確率を求めよ。

(4)　$n=4$ のとき，4 回目の操作ではじめて(2)の (＊＊) が成り立つ確率を求めよ。

教育学部

(小主免理系・中主免理系)

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B)

または

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

問　題	
1	必答問題
2	必答問題
3	必答問題
4	選択問題([A], [B], [C] のいずれかひとつを選択)

注　意　事　項

1. 問題は，1，2，3 および4の4問ある。これら4問をすべて解答すること。
2. 問題4は，[A], [B], [C] のいずれかひとつを選択して解答すること。ただし，[C] は数学Ⅲの内容を含んでいる。選択する際，4の解答用紙に記載されている注意事項もよく読むこと。
3. 解答は問題ごとに指定された解答用紙の解答欄に記入すること。解答欄が不足する場合は，「裏面に続く」と書き，裏面の枠内を使用すること。

1 次の各問に答えよ。

(1) 整数 p を 5 以上の素数とする。このとき，$p+2$ が素数ならば，$p+1$ は 6 の倍数であることを示せ。

(2) ある素数を 2 進法で表したとき，すべての位の数字が 1 である k 桁の数 $\overbrace{11\cdots1}^{k\text{個}}$ になったとする。このとき，k は素数であることを示せ。ただし必要ならば，自然数 m に対して，

$$X^m-1=(X-1)(X^{m-1}+X^{m-2}+\cdots+X+1)$$

が成り立つことを用いよ。

2 xを実数とするとき，次の不等式を満たすxの値の範囲を求めよ。

$$8^x + 8^{-x} - (4^x + 4^{-x}) - 11 \geqq 0$$

3 平面上に，長さ2の線分ABを直径とする円O_1があり，その中心をMとする。ABを$t:(1-t)$に内分する点をCとし，Cを通るABの垂線とO_1の円周との交点の1つをDとする。ただし，$0<t<1$とする。また，3点B，C，Dを通る円をO_2とし，その中心をNとする。さらに，3点D，M，Nを通る円をO_3とし，その中心をPとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 線分CDの長さをtを用いて表せ。

(2) 2つの円O_2とO_3の面積が等しくなるときのtの値を求めよ。

(3) $\triangle$MNPの面積が最大となるときのtの値を求めよ。

(4) 4点B，M，P，Nが同一円周上にあるときのtの値を求めよ。

4 は，［A］，［B］，［C］のいずれか 1 つを選択し，解答せよ。

4 17 ページの［A］，18 ページの［B］，19 ページの［C］のいずれか 1 つを選択し，解答せよ。

［A］ 袋の中に，1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれた 10 枚の札が入っている。これをはじめの状態とする。袋から無作為に 1 枚の札を取り出し，取り出した札は袋の中に戻さないという操作を，はじめの状態から続けて n 回行う。n 回のうち，k 回目 $(k = 1, 2, \cdots, n)$ の操作で取り出された札に書かれた数を X_k とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $n = 6$ のとき，X_1，$X_2, \cdots$，X_6 の組 $(X_1,\ X_2, \cdots,\ X_6)$ で，$X_1 = 1$，$X_2 = 2$，かつ次の（＊）を満たす例を 1 つ挙げよ。

（＊）すべての i，$j\ (i \neq j)$ に対して $X_i + X_j \neq 10$

(2) $n = 7$ のとき，次の（＊＊）が必ず成り立つことを示せ。

（＊＊）$X_i + X_j = 10$ を満たす i，$j\ (i \neq j)$ が存在する

(3) $n = 3$ のとき，3 回目の操作ではじめて(2)の（＊＊）が成り立つ確率を求めよ。

(4) $n = 4$ のとき，4 回目の操作ではじめて(2)の（＊＊）が成り立つ確率を求めよ。

4 は，［A］，［B］，［C］のいずれか１つを選択し，解答せよ。

［B］　２つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，$a_1 = \dfrac{1}{2}$，$b_1 = 2$，および

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　a_2，b_2，a_3，b_3 を求めよ。

(2)　次の式を満たす定数 p，q，r の組を２組求めよ。

$$a_{n+1} + pb_{n+1} + q = r(a_n + pb_n + q) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(3)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，それぞれの第 n 項 a_n，b_n を求めよ。

(4)　２つの数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を，$c_1 = \sqrt{2}$，$d_1 = 4$，および

$$\begin{cases} c_{n+1} = c_n d_n \\ d_{n+1} = 2c_n^2 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める。$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ の第 n 項 c_n，d_n について，$c_n^2 d_n$ を求めよ。

4 は，［A］，［B］，［C］のいずれか1つを選択し，解答せよ。

［C］ 関数 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ および座標平面上の原点Oを通る曲線 $C: y=f(x)$ について，次の各問に答えよ。

(1) 次の空欄に当てはまる数または数式を求めよ。(ただし，空欄に当てはまる答えだけでなく，答えを導く過程も記述すること。)

・$f(x)$ の導関数は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{2\sqrt{3-x}}$ である。

・$f(x)$ の第2次導関数は，$f''(x)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{4(3-x)\sqrt{3-x}}$ である。

・Oにおける C の接線を ℓ とし，ℓ の方程式を $y=kx$（k は定数）とすると，k の値は $\boxed{\text{う}}$ である。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3-0} f'(x)$ は，次のいずれかである。

$\displaystyle\lim_{x\to 3-0} f'(x)$ は有限な値である

$\displaystyle\lim_{x\to 3-0} f'(x)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to 3-0} f'(x)=-\infty$

この3通りのいずれであるかを答えよ。ただし，有限な値であるときは，その値も求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，曲線 C の概形をかけ。

(4) 曲線 C と直線 ℓ および直線 $x=3$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

教育学部

（小主免理系・中主免理系を除く）

農　学　部

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

注　意　事　項

1. 問題は，１，２および３の３問ある。これら３問をすべて解答すること。
2. 解答は問題ごとに指定された解答用紙の解答欄に記入すること。解答欄が不足する場合は，「裏面に続く」と書き，裏面の枠内を使用すること。

1 次の各問に答えよ。

(1) 次の等式がすべての実数α，βに対して成り立つことを示せ。

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

(2) 整数pを5以上の素数とする。このとき，$p+2$が素数ならば，$p+1$は6の倍数であることを示せ。

(3) 座標平面上の3つの曲線

$$C_1: y=x^2-4x+2$$
$$C_2: y=-x^2$$
$$C_3: y=-x^2+8x-16$$

で囲まれた部分の面積を求めよ。

2 座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と点 $\mathrm{A}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ がある。A を通る傾き t の直線と C との 2 つの交点を $\mathrm{Q}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}_2(x_2, y_2)$ とする。ただし，$x_1 < x_2$ とする。また，C の Q_1 における接線を ℓ_1，Q_2 における接線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 は交わり，その交点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $x_2 - x_1$ と $y_2 - y_1$ を，それぞれ t を用いて表せ。

(2) $X = -2t$ であることを示せ。

(3) t がすべての実数値をとって変化するとき，点 P の軌跡を求めよ。

3 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を, $a_1=\dfrac{1}{2}$, $b_1=2$, および

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=2a_n+1 \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

で定める。このとき，次の各問に答えよ。

(1) a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ。

(2) 次の式を満たす定数 p, q, r の組を2組求めよ。

$$a_{n+1}+pb_{n+1}+q=r(a_n+pb_n+q) \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

(3) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について，それぞれの第 n 項 a_n, b_n を求めよ。